مقدمه

واژه **"منطق فازی"** ابتدا در دهه 1960 توسط پروفسور لطفی زاده معرفی شد. به معنای وسیع، **منطق فازی (Fuzzy Logic)** سیستمی از مفاهیم، اصول و روش‌ها برای نوعی از استدلال است که بر پایه **تقریب** بنا شده است. به معنای اختصاصی‌تر، منطق فازی تعمیم‌یافته **منطق‌های چند ارزشی** است که در حوزه منطق نمادین در اواسط قرن بیستم ظهور کرد.

منطق فازی یک حوزه علمی و کاربردی وسیع است که با استفاده از مفاهیم و روش‌های نظریه مجموعه‌های فازی، اشکال گوناگون **استدلال تقریبی** را فرموله می‌کند. کلید درک این سیستم، کشف ارتباط بین درجات عضویت در مجموعه‌ها و درجات درستی در قضایای فازی است.

---

2. منطق‌های چند ارزشی (Multivalued Logics)

قضایایی که نه تنها مربوط به رخدادهای آینده، بلکه حتی در حوزه‌هایی مانند مکانیک کوانتوم، ذاتا دارای عدم تعیین (Indeterminacy) هستند. این عدم قطعیت ممکن است ناشی از محدودیت‌های اساسی در اندازه‌گیری پدیده‌های بسیار ریز، همانطور که در **اصل عدم قطعیت هایزنبرگ** اشاره شده، باشد. برای قضاوت در مورد چنین قضایایی، به **چهارچوب‌های منطقی** نیاز است که بتوانند عدم قطعیت و عدم قطعیت را در نظر بگیرند. این چارچوب‌ها، **منطق‌های چند ارزشی** نامیده می‌شوند.

- **منطق سه‌ارزشی (Three-Valued Logic):**

منطق‌های چند ارزشی با تخفیف دو حالت «صحیح» و «غلط» در منطق دو ارزشی کلاسیک و تجویز ارزش‌های درستی بیشتر آغاز می‌گردند. این ارزش‌های اضافی به عنوان **ارزش‌های میانی (Intermediate Values)** شناخته می‌شوند. در منطق سه‌ارزشی، معمولاً از سه ارزش استفاده می‌شود: **صفر (غلط)، نیم (میانی) و یک (صحیح)**.

این ارزش میانی، بر تعاریف جدول درستی ادوات پنج‌گانه منطق کلاسیک (نفی، عطف، فصل، شرط، دو شرطی) تأثیر می‌گذارد. با وجود این، بسیاری از ویژگی‌های منطق کلاسیک با تعاریف جدید سازگار باقی می‌مانند. اما برخی ناهمخوانی‌ها نیز وجود دارد، به‌ویژه در مورد **قاعده نفی** که با $\neg p = 1 - p$ تعریف شده، سازگاری بیشتری دارد.

- **جدول (1): نفی سه‌ارزشی**

p	¬p
0	1
½	½
1	0

- **جدول (2): رفتار ادوات پنج‌گانه در منطق‌های سه‌ارزشی گوناگون**

تعاریف سایر ادوات در منطق‌های سه‌ارزشی مختلف، متفاوت است. جدول (2) رفتار این ادوات را در مدل‌های گوناگون نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که تعاریف ادوات کلاسیک برای ارزش‌های صفر و یک حفظ شده‌اند، اما رفتار این ادوات با ارزش میانی «نیم» در مدل‌های مختلف متفاوت است.

- **قوانین و تاتولوژی‌ها در منطق‌های سه‌ارزشی:**

به دلیل رفتار متفاوت ادوات، منطق‌های سه‌ارزشی نمی‌توانند قوانینی مانند **قانون تناقض ($\neg(p \wedge \neg p) = 1$)**، **قانون نفی شق ثالث ($p \vee \neg p = 1$)** و سایر تاتولوژی‌های منطق دو ارزشی را ارضا کنند. چرا که حضور یک ارزش میانی (½) در محاسبات ممکن است منجر به تولید ارزش میانی شود، نه صفر یا یک قطعی.

در این منطق‌ها به جای مفهوم تاتولوژی، از مفهوم عام‌تر **شبه تاتولوژی (Quasi-Tautology)** استفاده می‌شود. فرمولی که لزوماً در همه سطرهای جدول درستی مقدار یک را تولید نمی‌کند.

- **جداول (3)، (4)، (5): تفسیر قوانین دمورگان در منطق‌های بوچوار، کلن و لاکازویچ**

این جداول نشان می‌دهند که قانون دمورگان در منطق‌های سه‌ارزشی کلاسیک نیست. تفاوت‌ها در سطرهایی که قضایا دارای ارزش میانی هستند، بروز می‌کند. مثلاً در منطق بوچوار، در شرایطی که عطف امکان صحت داشته باشد، لیبرال‌تر از کلن عمل می‌کند. منطق لاکازویچ نیز در این زمینه رویکردهای خاص خود را دارد.

- **جدول (6): تفسیر لاکازویچ از قاعده وضع مقدم (Modus Ponens)**

قاعده وضع مقدم که در منطق کلاسیک یک تاتولوژی است $[(p \to q) \wedge p] \to q$، در منطق سه‌ارزشی (مانند لاکازویچ) ممکن است تنها یک **شبه تاتولوژی** باشد. این بدان معناست که اعتبار استنتاج‌ها در منطق‌های چند ارزشی باید با احتیاط بیشتری مورد بررسی قرار گیرد، زیرا با گسترش مفهوم درستی، مفهوم اعتبار نیز نیازمند بازتعریف است.

- **تفسیر ادوات منطقی (لیبرال یا تحدیدی):** تفسیر ادوات منطقی به بینش ما از مفهوم «درستی» یک گزاره بستگی دارد. انسان‌ها در تفسیر خود از مفاهیم، شباهت‌ها و تفاوت‌های زیادی دارند که این منجر به جداول درستی متفاوت برای منطق‌های گوناگون می‌شود.

- **منطق‌های n-ارزشی (n-Valued Logics):**

منطق‌های چند ارزشی با موفقیت در تفسیر پدیده‌ها، زمینه را برای توسعه **منطق‌های n-ارزشی** فراهم کردند. ایده اصلی، مجاز دانستن اختصاص ارزش‌های درستی میانی دیگری علاوه بر «نیم»، برای نمایش مفاهیم فازی

(مانند «بیشتر درست»، «کمتر غلط»، «تقریبا صحیح») است.

- **ارزش‌های درستی در منطق n-ارزشی:** معمولاً با اعداد نسبی در بازه [0, 1] نمایش داده می‌شوند که با تقسیم یکنواخت این بازه به (n-1) زیربازه و قرار دادن نقاط انتهایی آن‌ها به عنوان ارزش‌های درستی، ایجاد می‌گردند.
  - مجموعه ارزش‌های درستی در منطق n-ارزشی را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد: $T_n=\{n-1n-2Tn=\{n-2n-1,\ldots,2n-1,1n-1,0n-1\}=\{1,n-2n-1,\ldots,2n-1,1n-1,0\}Tn$ $\{,0,n-11,\ldots,n-12\}=\{1,n-1n-2,n-10,n-11,\ldots,n-12$
  - **مثال:** در یک منطق پنج‌ارزشی (n=5n=5)، ارزش‌های درستی عبارتند از: {1,43}{1,34,24,14,0} ,0,41,42}.
- [منطق فازی](#) **به عنوان تعمیم منطق n-ارزشی:** محدود کردن ارزش‌های درستی به اعداد نسبی در بازه [0, 1] منجر به **منطق بی‌نهایت-ارزشی پیوسته (Infinite-Valued Continuous Logic)** یا [منطق فازی](#) می‌شود. مفاهیم مورد استفاده در این منطق، اساس نظریه مجموعه‌های فازی را تشکیل می‌دهند.

- [منطق فازی](#) **لاکازویچ:** تعمیم منطق سه‌ارزشی است که با ارزش‌های درستی در TnTn رفتار ادوات منطقی را با تساوی‌های زیر تعریف می‌کند:
  - $\neg p=1-p\neg p=1-p$
  - $p\wedge q=\min(p,q p\wedge q=\min(p,q)$
  - $p\vee q=\max(p,q p\vee q=\max(p,q)$
  - $p\to q=\min(1,1-p+q p\to q=\min(1,1-p+q)$
  - $p\leftrightarrow q=1-|p-q| p\leftrightarrow q=1-|p-q|$

  در صورت محدود کردن ارزش‌های درستی به بازه واحد [0, 1] و $n\to\infty n\to\infty$ ، منطق بی‌نهایت-ارزشی پیوسته حاصل می‌شود.
- **استدلال تقریبی (Approximate Reasoning):** [منطق فازی](#) چارچوبی برای مدل‌سازی استدلال انسانی فراهم می‌کند که اغلب بر پایه زبان طبیعی و مفاهیم تقریبی استوار است (مانند "معمولاً"، "خیلی"، "نسبتاً"). این استدلال‌ها که با ترکیب یا تعدیل مفاهیم فازی انجام می‌شوند، **استدلال تقریبی** نامیده می‌شوند.
  - **مثال:** "سکه های قدیمی معمولا کمیاب هستند. سکه های کمیاب گران هستند. نتیجه: سکه های قدیمی معمولا گران هستند." این استنتاج، علی‌رغم اعتبار عرفی، در منطق کلاسیک به دلیل ابهام واژگان (کمیاب، معمولا، گران) به سادگی قابل فرموله شدن نیست.

3. قضایای فازی (Fuzzy Propositions)

تفاوت اساسی بین قضایای کلاسیک و فازی در دامنه ارزش‌های درستی آن‌هاست. قضایای کلاسیک یا صحیح (1) یا غلط (0) هستند، در حالی که قضایای فازی دارای **درجه درستی** بین 0 و 1 می‌باشند.

- **تعریف:** درجه درستی یک قضیه فازی با عددی در بازه [0, 1] نشان داده می‌شود.
  - **مثال:** قضیه "کوه واشنگتن یک کوه خطرناک است" به دلیل عدم وضوح مفاهیم "کوه" و "خطرناک"، فازی است.
- **تفاوت قضیه زبانی و فرازبانی:**
  - **زبان شیئی (Object Language):** نسبت دادن خاصیتی به پدیده‌ای در جهان خارج. (مثال: کوه واشنگتن خطرناک است.)
  - **فرازبانی (Meta Language):** بیان قضاوت در مورد درستی یک قضیه دیگر. (مثال: قضیه "کوه واشنگتن خطرناک است" صحیح است.) قضایای فازی اغلب اولی هستند، اما برای بیان درجه درستی آن‌ها از دومی بهره می‌بریم.

- **انواع قضایای فازی (بدون سُور):**

1. **قضایای غیر شرطی و غیر مقید (Unconditional and Unqualified):**
   - شکل نمادین: P:X is AP:X is A
   - XX: متغیر (مانند حرارت)؛ AA: محمول فازی (مانند "بالا").
   - **مثال اول:** "حرارت 35 درجه سانتی‌گراد خیلی بالاست." (X=حرارت، مقدار=35، A="خیلی بالاست")
   - **درجه درستی:** درجه درستی قضیه فازی P:X is AP:X is A برای مقدار xx از XX، برابر با درجه عضویت A(x)A(x) در مجموعه فازی AA است: T(P)=A(x)T(P)=A(x). تابع TT اینجا تابع همانی است، بین منطقه [0, 1] درجات عضویت و [0, 1] درجات درستی پل می‌زند.
   - **مثال با تابع عضویت:** برای رطوبت نسبی (XX) و محمول فازی "رطوبت بالا" (HH)، اگر X=65%X=65% باشد و H(65)=0.25H(65)=0.25 (طبق شکل 1-الف که تابع عضویت را نشان می‌دهد)، آنگاه درجه درستی قضیه "رطوبت 65 درصد بالاست" برابر با 0.25 است.

2. **قضایای غیر شرطی و مقید (Unconditional and Qualified):**
   - شکل: P:"X is A" is SP:"X is A" is S
   - SS: سُور کیفی درستی (مانند "خیلی درست"، "نسبتاً درست"، "غلط"). هر سُور کیفی با یک تابع از بازه [0, 1] تعریف می‌شود.
   - **مثال:** "رطوبت 65 درجه بالاست" **نسبتا غلط** است.

- **درجه درستی:** $T(P)=S(A(X))T(P)=S(A(X))$. درجه درستی سُور کیفی اعمال شده بر درجه عضویت $A(X)A(X)$.

3. **قضایای شرطی و غیر مقید (Conditional but Unqualified):**

- شکل: P:IF X is A, THEN Y is BP:IF X is A, THEN Y is B
- A,BA,B: محمولات فازی؛ X,YX,Y: متغیرها.
- **مثال:** "اگر تیب جوان باشد، پس جان پیر است."
- **استلزام فازی (Fuzzy Implication):** رابطه بین مقدم (XX is AA) و تالی (YY is BB) با یک تابع استلزام فازی نمایش داده می‌شود. متداول‌ترین آن، **استلزام لاکازویچ** است: $A(x)\to B(y)=\min(1,1-A(x)+B(y))A(x)\to B(y)=\min(1,1-A(x)+B(y))$.
- **درجه درستی:** $T(P)=\min(1,1-A(x)+B(y))T(P)=\min(1,1-A(x)+B(y))$.
- **مثال:** "اگر کتاب درسی حجیم باشد، پس قیمت آن گران است." (شکل 3 مجموعه‌های فازی L و E را نشان می‌دهد). درجه درستی برای کتابی با حجم xx و قیمت yy.

4. **قضایای شرطی و مقید (Conditional and Qualified):**

- شکل: P:IF X is A, THEN Y is B is SP:IF X is A, THEN Y is B is S
- SS: سُور کیفی درستی.
- **درجه درستی:** $T(P)=S(T(P_{unqualified}))T(P)=S(T(P_{unqualified}))$. ابتدا درجه درستی حالت غیر مقید محاسبه شده و سپس سُور کیفی SS بر آن اعمال می‌شود.
- **مثال:** "اگر یک کتاب درسی حجیم باشد، پس آن کتاب گران است"، **خیلی درست** است. (شکل 4 درجات درستی را نمایش می‌دهد که با اعمال سورهای فازی تعدیل شده‌اند.)

---

4. سُورهای فازی (Fuzzy Quantifiers)

در منطق کلاسیک، دو نوع سُور وجود دارد: سُور کلی (∀∀) و سُور وجودی (∃∃). این سُورها به ما در تبدیل عبارات زبان طبیعی به زبان نمادین کمک می‌کنند.

- **محدودیت منطق کلاسیک:** منطق کلاسیک در تفسیر عباراتی مانند "تقریباً همه"، "اغلب"، "حداقل" با مشکل مواجه است. این عبارات اطلاعات معنایی و کیفی مهمی را منتقل می‌کنند که منطق کلاسیک قادر به capture آن‌ها نیست.

- **نقش سورهای فازی:** سورهای فازی ابزارهای مناسبی برای نمادین کردن جملات با سور، با حداقل کاهش اطلاعات هستند. این سورها همان **اعداد فازی** هستند که درجه درستی قضاياي فازي را بیان می‌کنند.

- **انواع سورهای فازی:**

1. **سورهای مطلق:** با اعداد فازی در مجموعه‌های اعداد طبیعی یا صحیح تعریف می‌شوند. (مثال: "حدود 20 هتل"، "حداقل 10 دانشجو").
2. **سورهای نسبی:** با اعداد فازی در بازه [0, 1] تعریف می‌شوند و نسبت تقریبی از عناصر را بیان می‌کنند. (مثال: "اغلب"، "تقریباً همه"، "حدود نصف"، "حدود 20 درصد").

- **ارتباط با قیود زبانی (Linguistic Hedge):** واژه‌هایی مانند "خیلی"، "کم"، "نسبتاً"، "بیشتر" که میزان ارزش درستی سُورها یا محمولات فازی را تغییر می‌دهند.

  - **مثال:** "جان جوان است" در مقابل "جان خیلی جوان است" یا "جان جوان است" در مقابل "'جان جوان است' خیلی درست است".
  - **قید به عنوان پیشوند:** قید زبانی HH را می‌توان به عنوان یک عمل پیشوند hh روی محمول فازی AA در نظر گرفت: H(A)=h(A(X))H(A)=h(A(X)).
  - **مقادیر عددی برای قیدها:** "زیاد" به عنوان h(a)=a2h(a)=a2 و "نسبتاً" به عنوان h(a)=ah(a)=a

  - قابل تفسیر هستند (که aa درجه عضویت A(X)A(X) است).
  - **قضایای فازی با سور و قید:** ترکیب این مفاهیم به ما امکان بیان قضایای پیچیده‌تر را می‌دهد.

---

5. استدلال تقریبی (Approximate Reasoning)

هدف منطق کلاسیک، استنتاج دقیق از قضایای معتبر است. اما انسان‌ها اغلب از **استدلال عرفی** استفاده می‌کنند که بر پایه تجربه و مفاهیم فازی است.

- **چالش در منطق کلاسیک:** منطق کلاسیک از واژگان فازی (مانند "حجیم"، "گران"، "معمولاً") که معنای دقیق و مرز بندی شده ندارند، ناتوان است. همچنین، تطابق مقدم و تالی در قواعد استنتاج کلاسیک (مانند Modus Ponens) حیاتی است، موردی که در استدلال عرفی همیشه رعایت نمی‌شود.

  - **مثال:** قاعده کلاسک Modus Ponens: اگر p→qp→q و pp برقرار باشد، آنگاه qq برقرار است. این قاعده بر پایه ارزش‌های صفر و یک بنا شده است.

- **کاربرد منطق فازی در استدلال تقریبی:**

  - مدل‌سازی استدلال‌های انسانی مبتنی بر تجربه.
  - طراحی سیستم‌های خبره در محیط‌های فازی.
  - **قاعده عام Modus Ponens در استدلال تقریبی:**

P:IF X is A, THEN Y is BP:IF X is A, THEN Y is B (قاعـده) / واقعیـت: X is A′X is A′ / نتیجـه: Y is B′Y is B′

- برای محاسبه درجه درستی B′B′ (نتیجه فازی)، از فرمول زیر استفاده می‌شود: B′(y)=supx∈Xx∈XminB′(y)=sup(min(A(x),I(A′(x),B(y(A(x),I(A′(x),B(y))))).
- که در آن II نمایانگر یک **تضمین فازی (Fuzzy Implication)** است (مانند استلزام لاکازویچ). این فرمول بیانگر آنست که چگونه مقدمه فازی “نسبتا حجیم بودن” می‌تواند به نتیجه‌ای فازی مانند “نسبتا گران بودن” منجر شود.